Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

TM3 Formelsammlung

Jan Höffgen

20. März 2012

Wer einen Fehler findet, melde ihn bitte an Zusammenfassungen@me.com,
damit ich eine korrigierte Version in Umlauf bringen kann.

Koordinatensysteme

kart.: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \rightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \rightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

polar: $\vec{e}_r(\varphi) = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$, $e_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$; $\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$, $\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \vec{e}_r$; $\dot{\vec{e}_r} = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\dot{\vec{e}_\varphi} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(\varphi(t)) \rightarrow \vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \rightarrow \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\varphi + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$, mit $\dot{\varphi} = \omega$, Zylinderkoord. im 3D

Natürliche Koord.: $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s} = \dot{s}\vec{e}_t$ (mit $\dot{s} = |v|$), $\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n$, ($\rho$ =lok. Krümmung, $\frac{1}{\rho} = |\frac{d\vec{e}_t}{ds}|$),
a_t gegeben: $s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v^* dv^*}{a_t(v^*)}$

Schiefer zentrischer Stoß

Impulsbilanz: $m_1\bar{\vec{v}}_1 - m_1\vec{v}_1 = \hat{\vec{F}}$, $m_2\bar{\vec{v}}_2 - m_2\vec{v}_2 = -\hat{\vec{F}}$, $e = -\frac{(\bar{\vec{v}}_1 - \bar{\vec{v}}_2)\cdot\vec{n}}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\cdot\vec{n}}$, $\vec{n} = \vec{e}_\xi$ (Stoßnormale)

Gerader zentrischer Stoß: $\bar{v}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$, $\bar{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$

Ebene Bewegung des starren Körpers: $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ}$ (bei Rotation um P)

Momentanpol M: $\vec{v}_M = \vec{0} \rightarrow \ \vec{v}_P = -\omega \times \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{v}_Q$

Gangpolplan: alle M im körperfesten Sys., Rastpolplan: alle M im raumfesten Sys.

Rotation um feste Achse: KOS, i.A. nur Drehwinkel φ um Momentanpol $\rightarrow$ FS in ausgelenkter (=allg.) Lage (Auflagerkräfte im Drehpunkt und Zwangskräfte nicht freischneiden) $\rightarrow$ Masseträgheitsmoment um Drehpunkt

a) im SP: $J^S = \int r^2 dm = I_P \cdot \gamma \cdot t$, b) im Drehpunkt: $J^A = J^S + r_s^2 \cdot m \ \rightarrow$ Drallsatz (Sonderform): $\sum M^A = J^A\ddot{\varphi}$

Kinetik der ebenenen Bewegung: KOS (x,y für Translation, φ für Rotation), $\rightarrow$ FS in allg. Lage (alle eingeprägte und Zwangskräfte) $\rightarrow$ MTM im SP $\rightarrow$ Schwerpunktssätze: GGW: $\sum F_{ix} = m\ddot{x}_s$, $\sum F_{iy} = m\ddot{y}_s$, $\sum M^{(S)} = J^{(S)}\ddot{\varphi} \rightarrow$ evtl. Bindungsgleichungen (falls mehr als drei Unbekannte)

Energiebilanz (st.K.): KOS $\rightarrow$ NN $\rightarrow$ Energien in 2 Punkten: kin. En.: $T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}J^{(S)}\dot{\varphi}^2$
(Alt: nur Rot. um Momentanpol: $T = \frac{1}{2}J^{(M)}\dot{\varphi}^2$), pot. En.: $V = V_{Lage} + V_{Feder} = mgz + \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2$
$\rightarrow$ Arbeit der Nichtpotentialkräfte und Momente: $W|_1^2 = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F} d\vec{x} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \rightarrow$ Energiebilanz: $T_1 + V_1 + W|_1^2 = T_2 + V_2$
$\rightarrow$ Bewegungsgleichung

Systeme starrer Körper

Synthetische Methode: Def. Bewegung jedes einzelnen Körpers (Rot., Trans., Rot.+Trans.) $\rightarrow$ KOS $\rightarrow$ Anzahl FHG $\rightarrow$ FS aller Teilkörper in allg. Lage $\rightarrow$ GGW an jedem Körper (Drallsatz, SPS) $\rightarrow$ Bindungsgleichungen $\rightarrow$ Linearisieren $\rightarrow$ Bewegungsgleichungen

Analytische Methode (**Lagrange**): Anzahl FHGe $\rightarrow$ generalisierte Koord'n q_k, $k = 1, ..., f \ \rightarrow$ Ortsvektoren zu einzelnen (n) SP'en $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_k)$, $i = 1, ..., n \rightarrow$ NN $\rightarrow |\dot{\vec{r}_i}| \rightarrow$ Energieausdrücke: $T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}_i}|^2 + \frac{1}{2}J^{(S/A)}\dot{\varphi}^2$,
$V = V_{Lage} + V_{Feder} = mgh + \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 \rightarrow$ Generalisierte Kräfte $Q_k^* = \frac{\partial W^*}{\partial q_k}$ mit $W^* = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^* \circ \vec{r}_j$
$\rightarrow$ f Lagrange'sche Gleichungen: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k^*$

Schwingungen

Allg: $\omega = 2\pi f$: Kreisfrequenz oder $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$: Eigenfrequenz, Ω: Erregerfrequenz, C: Amplitude,
α: Phasenversch., $\delta = \frac{d}{2m}$: Abklingkoeff., $D = \frac{\delta}{\omega}$: Lehr'sches Dämpfungsmaß, $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$: Abstimmverhältnis,
$V = \frac{1}{1-\eta^2}$: Vergrößerungsfunktion;
Ungedämpfte freie Schwingung: DGL: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, Lsg: $x(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$
Gedämpfte freie Schwingung: DGL: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$, Lsg (für $D \ll 1$): $x(t) = Ce^{-\delta t}\cos(\omega\sqrt{1 - D^2}t - \alpha)$
Ungedämpfte erzwungene Schwingung mit $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$: DGL: $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X_0\cos(\Omega t)$, Lsg: $x_p(t) = X_0 V\cos(\Omega t)$
Gedämpfte erzwungene Schwingung: DGL: $\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = X_0 E\omega^2\cos(\Omega t)$, Lsg: $x_p(t) = X_0 V\cos(\Omega t - \varphi)$, φ: Phas.versch. zw. Erregung und Ausschlag, $E = 1$: Erregung durch Feder, $E = 2D\eta$: Err. ü. Dämpfer, $E = \eta^2$: Err. durch rot. Unwucht

2 FHG: Bew-Glg mit **Lagrange** $\rightarrow Q_i* = 0 : M\ddot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{0}$ (M: Massen-, K: Steifigkeitsmatrix) $\rightarrow$ Lsg: $\vec{q} = \vec{C}\cos(\omega t + \alpha)$, Bed. für nichttriviale Lsg: $c_{1,2} \neq 0 \Leftrightarrow \det(K - \omega^2 M) = 0$ mit $\omega_1^2 < \omega_2^2$ Eigenfreq. des Sys. $\rightarrow$ Amplitudenverhältnis: $\kappa_i = \frac{m_{11}\omega_i^2 - k_{11}}{k_{12} - m_{12}\omega_i^2}$, Eigenvektoren: $\Phi_i = (1, \kappa_i) \rightarrow$ Eigenformen skizzieren: 1. FHG um 1 auslenken, 2. FHG um κ_i auslenken

Ebene Relativbewegung: Relativsys. (ξ, η, ζ) bew. sich translat. u. rot. um Inertialsys. (x, y, z). $\vec{r}_Q(t) = \vec{r}_P(t) + \vec{\rho}(t) \rightarrow$
$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_P + \vec{\omega}(\xi\vec{e}_\eta - \eta\vec{e}_\xi) + \dot{\xi}\vec{e}_\xi + \dot{\eta}\vec{e}_\eta \rightarrow \vec{a}_Q = \vec{a}_f + \vec{a}_c + \vec{a}_{rel} = \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$
Kinetik: $m\vec{a}_{rel} = \vec{F} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_f$, $-m\vec{a}_c = \vec{F}_c$: Corioliskraft, $-m\vec{a}_f = \vec{F}_f$: Führungskraft inkl. $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$: "Fliehkraft"

Ersatzfedersteifigkeiten: allg: $k = \frac{F}{w}$, Dehnstab: $k = \frac{EA}{l}$, eingespannter Balken, QK am Balkenende: $k = \frac{3EI}{l^3}$,
F in Balkenmitte: $k = \frac{48EI}{l^3}$, unten eingespannter, oben bew. eingespannter Balken: $k = \frac{12EI}{l^3}$

Massenträgheitsmomente: Prismen: $J^{(S)} = I_P\gamma t = I_P\frac{m}{A}$: Quarder: $J^{(S)} = \frac{m}{12}(b^2 + l^2)$, Kreiszylinder: $J^{(S)} = \frac{m}{2}r^2$

J.H.